

Math en Jeans 2018
Lycée

Sujet 1 - Empilement minimal de segments

Si on a choisi dans le plan un segment de référence $[OI]$ ($O \neq I$) et si $\alpha \in [0, 2\pi]$, on dit qu'un segment $[AB]$ a pour direction α si l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{OI} et \overrightarrow{AB} a pour mesure α .

- Construire des parties \mathcal{A} du plan, d'aire aussi petite que possible, telles que, pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, \mathcal{A} contienne un segment de longueur 1 et de direction α .
- Plus généralement, construire des parties \mathcal{A}' du plan, d'aire aussi petite que possible, telles que, pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, \mathcal{A}' contienne une infinité de segments de longueur 1, de direction α et deux à deux disjoints.

Sujet 2 - PGCD des coefficients binomiaux

Soit n un nombre entier naturel non nul.

- On suppose que n est premier. Quel est le pgcd des coefficients binomiaux $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$?
- Montrer que pour tout entier n , $n^p - n$ est divisible par p .
- Que devient le résultat de la première question si n est une puissance d'un nombre premier ?
- Déterminer une formule donnant le pgcd de $\binom{2n}{2}, \binom{2n}{4}, \dots, \binom{2n}{2n-2}$.

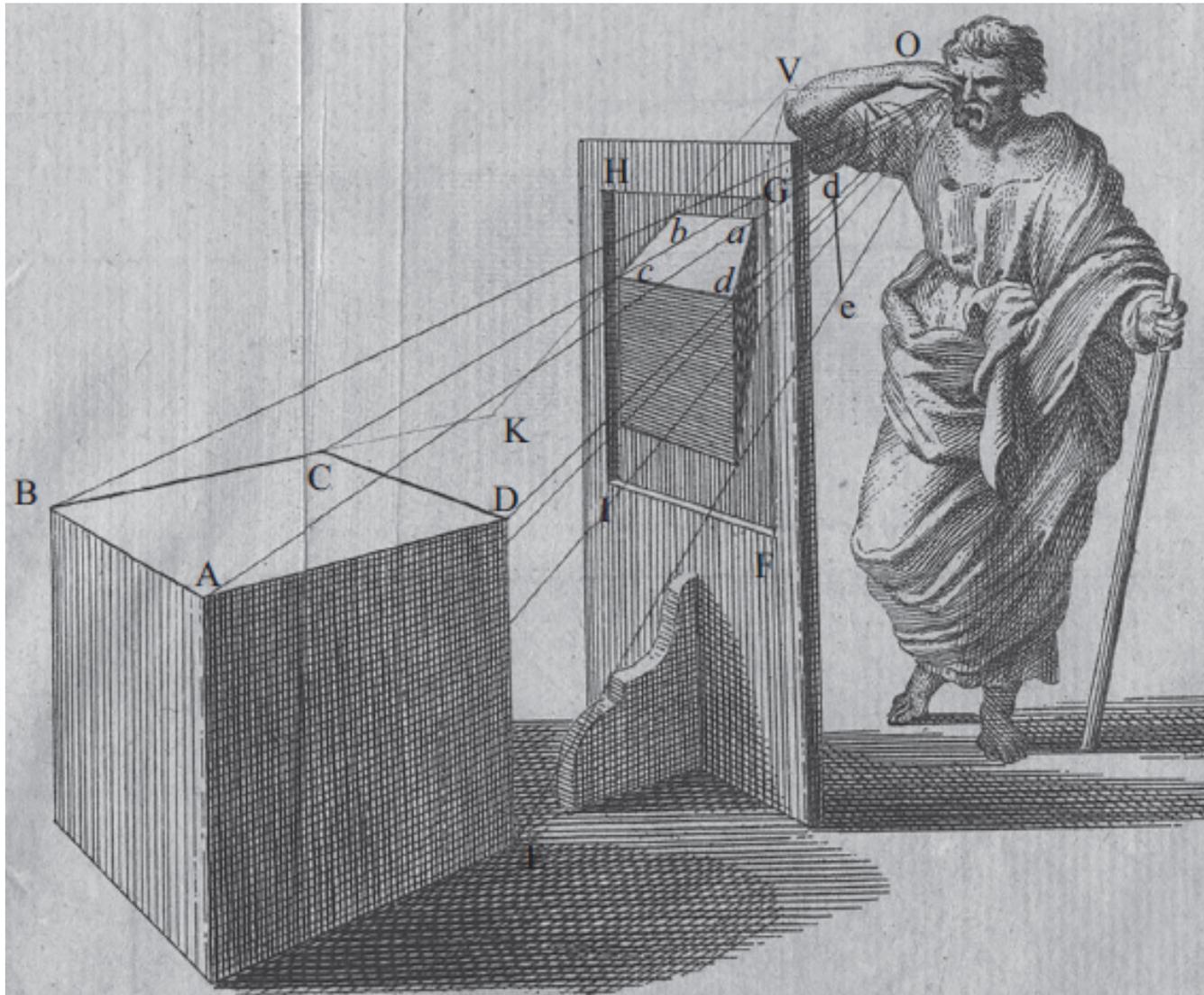
Sujet 3 - Stationnement sur le Périphérique...

Des segments ont été délimités par 4026 marques blanches le long du BP (Boulevard Périphérique) nouvellement transformé en aire de stationnement. Sachant que pour se garer toute voiture occupe deux segments adjacents, la capacité maximale de stationnement est de 2013 voitures.

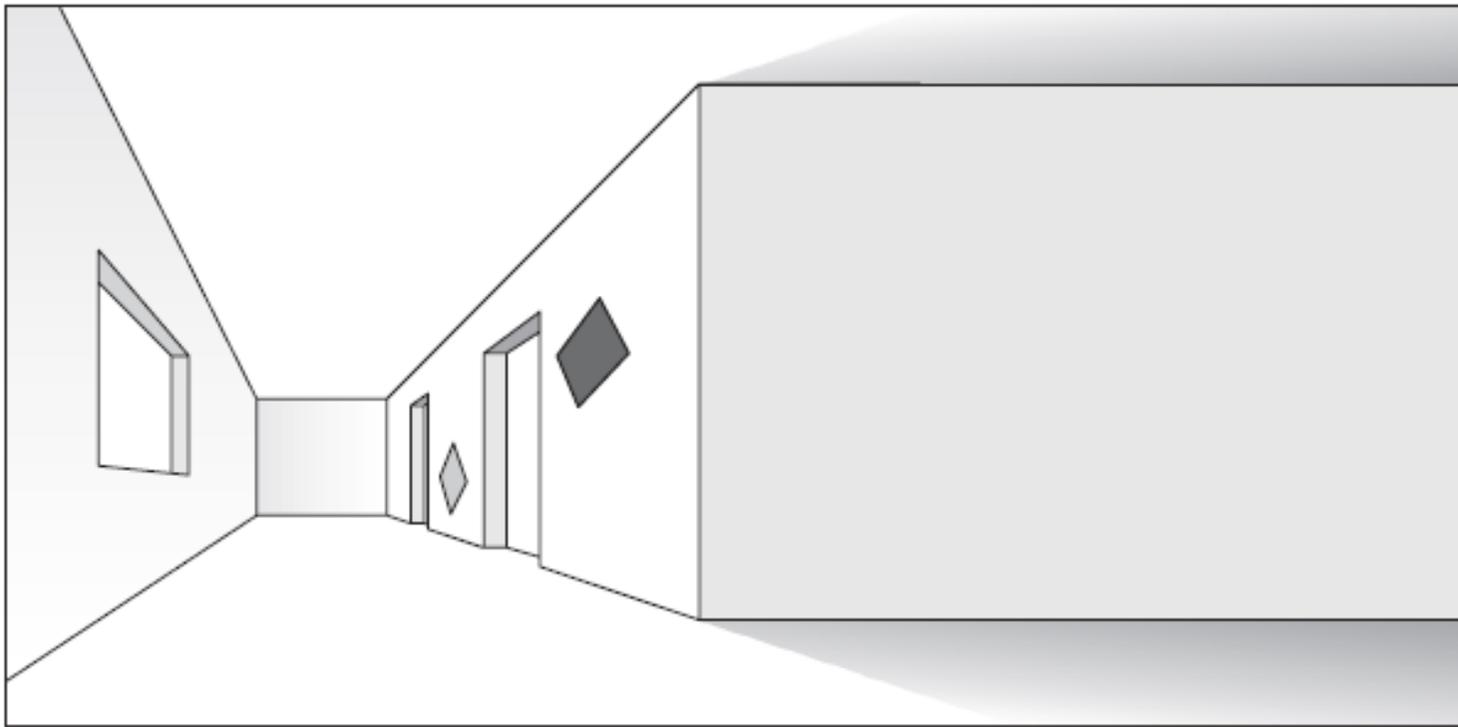
A la première heure de la journée, le BP est complètement libre. Les voitures arrivent les unes après les autres et choisissent de manière aléatoire deux segments adjacents libres jusqu'à occuper la dernière place disponible.

Combien de voitures en moyenne (arrondi à l'entier le plus proche) parviennent à stationner le long du périphérique ?

Sujet 4 - Photogrammétrie



La vue en perspective...



Le dessin représente la vue en perspective (par exemple après la prise d'une photo) de deux murs d'un hall d'exposition. Les deux quadrilatères gris du mur de droite correspondent à des affiches carrées.

- Quelle est la plus grande des deux affiches ?